20/12/2016

• Τι νόημα θα είχαν οι ταλαντώσεις στην κβαντική φυσική;

Δηλαδή, έστω ότι έχουμε ένα ελατήριο (απλός αρμονικός ταλαντωτής)

$F = -kx$ (νόμος του Hook) $\Rightarrow F = -\dfrac{dV}{dx} \Rightarrow \boxed{V(x) = \dfrac{1}{2}kx^2}$

(Διατηρητική δύναμη)

συνάρτηση δυναμικού στον απλό αρμονικό ταλαντωτή

Αν θεωρήσουμε: $\hbar = \omega = k = 1$, τότε το Π.Σ.Τ. γράφεται ως:

$$\begin{cases} \psi'' + (2E - x^2)\psi = 0 \\ \psi(\pm\infty) = 0 \end{cases} \qquad \text{Π.Σ.Τ.} \ (1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες, $\psi(\pm\infty) = 0$, εκφράζουν την απαίτησή μας να περιγράφουμε σωμάτια που αδυνατούν να διαφύγουν στο άπειρο (παραμένουν δέσμια) και άρα η πιθανότητα αυτά να βρεθούν σ'αυτή την περιοχή μηδενίζεται.

Για μηδενική ιδιοτιμή, $E = 0$: $\psi''_\infty - x^2\psi_\infty = 0$, οι λύσεις ψ_∞ εκφράζουν την συνάρτηση, ψ, στην περιοχή του απείρου. Όμως, έχουμε ότι η $\psi_\infty(x) = e^{-x^2/2}$ επαληθεύει την παραπάνω δ.ε.

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι: $\psi(x) = \psi_\infty(x)\, H(x) = e^{-x^2/2} H(x)$ (2)

$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad H''(x) - 2xH'(x) + (2E-1)H(x) = 0$

Αν θεωρήσουμε $E = E_n = n + \frac{1}{2}$, τότε παίρνουμε την Δ.Ε. Hermite:

$H''(x) - 2xH'(x) + 2nH(x) = 0$, η λύση της αντιστοιχεί στα πολυώνυμα Hermite.

Ορισμός:

Ως αβεβαιότητα, ΔA, ορίζουμε την τυπική απόκλιση, $\sigma^2 = (\Delta A)^2$, δηλαδή την διασπορά των τιμών γύρω από την μέση τιμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν μια συνάρτηση, ψ, ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών $A\psi = a\psi$, ενός κβαντομηχανικού τελεστή, A, με ιδιοτιμή, a, τότε η αβεβαιότητα, ΔA, του μεγέθους, A, μηδενίζεται.

Το μόνο αποτέλεσμα που μπορεί να προκύψει από τις μετρήσεις είναι η ιδιοτιμή, a.

Αρχή της αβεβαιότητας ή αρχή απροσδιοριστίας

Το γινόμενο της αβεβαιότητας θέσης και ορμής (ταχύτητα) δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το ήμισυ της σταθεράς, $\hbar$, του Planck, δηλαδή:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Φυσική σημασία: Η ταυτόχρονη ακριβής γνώση της θέσης και της ταχύτητας (ορμής) ενός κβαντικού σωματιδίου είναι αδύνατη.

Δ.Ε. Bessel / Πολυώνυμα ή συναρτήσεις Bessel

$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, Δ.Ε. Bessel (1)

Σύμφωνα με την μέθοδο του Fröbenius έχουμε ότι:

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\sigma}$, τότε $y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\sigma) x^{k+\sigma-1}$ και $y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+\sigma)(k+\sigma-1) x^{k+\sigma}$

Επίσης: $x^2 y = \sum_k C_k x^{k+\sigma+2}$ = αναδιάταξη της σειράς = $\sum_k C_{k-2} x^{k+\sigma}$

Τελικά: $\overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_k C_k (k+\sigma)(k+\sigma-1) x^{k+\sigma} + \sum_k C_k (k+\sigma) x^{k+\sigma} + \sum_k C_{k-2} x^{k+\sigma} + \sum_k C_k(-n^2) x^{k+\sigma} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_k \{ C_k[(k+\sigma)(k+\sigma-1) + (k+\sigma) - n^2] + C_{k-2} \} x^{k+\sigma} = 0$

Δηλαδή, $C_k[(k+\sigma)(k+\sigma-1) + (k+\sigma) - n^2] + C_{k-2} = 0 \Leftrightarrow$

$C_k[(k+\sigma)(k+\sigma\cancel{-1}\cancel{+1}) - n^2] + C_{k-2} = 0 \Leftrightarrow$

$C_k[(k+\sigma)^2 - n^2] + C_{k-2} = 0$

Οι αρνητικοί όροι της σειράς μηδενίζονται, $C_{-2} = C_{-1} = 0$ και για

$k=0$, $C_0[\sigma^2 - n^2] = 0 \Rightarrow \sigma^2 = n^2 \Rightarrow \sigma = \pm n$, δύο περιπτώσεις.

$k=1$, $C_1[(1+\sigma^2) - n^2] = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

1η περίπτωση, $\sigma = n$, τότε $C_0 \neq 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{-C_0}{4(n+1)}$, $C_3 = 0$, $C_4 = -\frac{C_2}{4(2n+4)}$

$= \frac{C_0}{2 \cdot 4 (2n+2)(2n+4)}$ κα

άρα: $y(x) = C_0 \cdot x^n + C_2 x^{n+2} + C_4 x^{n+4} + \dots \Rightarrow$

$$y(x) = C_0 \cdot x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 (2n+2)(2n+4)} + \dots \right]$$

Όμοια διαδικασία και για την περίπτωση, $s=-n$.

Παρατήρηση: Η συνολική λύση της Δ.Ε. Bessel (1), είναι ο γραμμικός συνδυασμός των δύο παραπάνω λύσεων.
Η συνολική λύση θα γράφεται ως: $y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$, όπου
$J_n(x)$: η συνάρτηση Bessel 1ου είδους, τάξης n.
$Y_n(x)$: η συνάρτηση Bessel 2ου είδους, τάξης n.

Ιδιότητες: 1) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση, $\Gamma(x)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{r! \, \underbrace{\Gamma(n+r+1)}_{(n+r)!}}$$

2) Γεννήτρια συνάρτηση
Η συνάρτηση, $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$ (1), είναι η γεννήτρια συνάρτηση των συναρτήσεων Bessel 1ου είδους. Δηλαδή, οι συναρτήσεις Bessel, $J_n(x)$, μπορούν να οριστούν ως συντελεστές του t^n, στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ σε σειρά.